12 Notranji automorfizem. Grupa automorfizmov.

Spomnimo se: Preslikava ϕ iz grupe G sama vase se imenuje automorfizem grupe G če in samo če (i) $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ za $\forall a, b \in G$; (ii) ϕ je injekcija; (iii) ϕ je surjekcija.

Izrek

Naj bo f automorfizem grupe G. Če je N edinka grupe G, potem je $f(N)$ tudi edinka grupe G.

1. Dokaži izrek zgoraj.

2. Naj bo G grupa in naj bo Z center grupe G. Če je f automorfizem grupe G, pokaži da je potem $f(Z) \subseteq Z$.

3. Naj bo G grupa in naj bo f automorfizem grupe G. Če za $a \in G$ definiramo $N(a) = \{x \in G : ax = xa\}$, pokaži da potem velja $N(f(a)) = f(N(a))$.

4. Naj bo G grupa in naj bo a poljubni ampak fiksen element grupe G. Naj bo f_a preslikava iz G v G definirana z $f_a(x) = a^{-1}xa$, $x \in G$. Pokaži, da je preslikava f_a dobro definirana in da je automorfizem grupe G.

Definicija (notranji in zunanji automorfizem)

Naj bo $a \in G$. Automorfizem $f_a(x) = a^{-1}xa$, $x \in G$, se imenuje notranji automorfizem grupe G, ki ustreza elementu a. Automorfizem, ki ni notranji automorfizem, se imenuje zunanji automorfizem.

5. Naj bo G aditivna grupa celih števil. Poišči notranji automorfizem grupe G, ki ustreza elementu 5 grupe G.

6. Poišči zgled grupe G v kateri obstajata elementa $a, b \in G$, $a \neq b$, tako da velja $f_a = f_b$ (f_a in f_b sta dva notranja automorfizma grupe G, tako da $f_a = f_b$).

7. Naj bo $f : G \to G$ homomorfizem in naj f komutira z vsakim notranjim automorfizmom grupe G. Pokaži da je $H = \{x \in G : f^2(x) = f(x)\}$ edinka grupe G.

Izrek

Za abelske grupe je edini notranji automorfizem identična preslikava, medtem ko za neabelske grupe obstaja netrivialen notranji automorfizem.

8. Dokaži izrek zgoraj.

9. Naj bo G grupa in naj bo $\mathrm{Aut}(G)$ množica vseh automorfizmov grupe G. Pokaži, da je množica $\mathrm{Aut}(G)$ grupa glede na operacijo kompozicije funkcij.

Definicija (grupa automorfizmov)

Grupo $\mathrm{Aut}(G)$, vseh automorfizmov grupe G, glede na operacijo kompozicije funkcij, imenujemo grupa automorfizmov grupe G.

10. Naj bo G ciklična grupa reda 4. Pokaži, da je grupa automorfizmov grupe G, reda 2.

11. Če je $|\mathrm{Aut}(G)| > 1$, pokaži da je potem $|G| > 2$.

12. Naj bo G neskončna ciklična grupa. Pokaži, da je $|\mathrm{Aut}(G)| = 2$.

13. Naj bo G končna ciklična grupa reda n. Pokaži, da je potem $|\mathrm{Aut}(G)| = \phi(n)$, kjer je ϕ Eulerjeva funkcija fi.

14. Naj bo G grupa in naj bo $\mathrm{Inn}(G)$ množica notranjih automorfizmov grupe G. Pokaži, da je množica $\mathrm{Inn}(G)$ grupa glede na operacijo kompozicije.

Definicija (Inn(G))

Grupo Inn(G) vseh notranjih automorfizmov grupe G, glede na operacijo kompozicije, imenujemo grupa notranjih automorfizmov grupe G.

15. Določi Inn(D_4) (po potrebi uporabi Cayley-evo tabelo, ki smo jo imeli v eni od prejšnjih nalog).

16. Določi Aut($\mathbb{Z}_{10}$).

17. Pokaži, da je Aut($\mathbb{Z}_n$) $\cong U(n)$.

Izrek

Množica Inn(G) vseh notranji automorfizmov grupe G je edinka grupe Aut(G) vseh automorfizmov grupe G.

18. Dokaži izrek zgoraj.

Izrek (Inn(G) $\cong G/Z(G)$)

Za vsako grupo G, je $G/Z(G)$ izomorfna z Inn(G).

19. Dokaži izrek zgoraj.

20. Naj bo $G = S_3$. Pokaži, da je Inn(G) $\cong G$.

POMEMBNI REZULTATI

1. Naj bo f automorfizem grupe G. Če je H podgrupa grupe G, potem je $f(H)$ tudi podgrupa grupe G.
2. Naj bo f automorfizem grupe G. Če je N edinka grupe G, potem je $f(N)$ tudi edinka grupe G.
3. Za abelske grupe je edini notranji automorfizem identična preslikava, medtem ko za neabelske grupe obstaja netrivialen notranji automorfizem.
4. Množica Inn(G) vseh notranjih automorfizmov grupe G je edinka grupe Aut(G) (vseh automorfizmov grupe G).
5. Za vsako grupo G je $G/Z(G)$ izomorfna z Inn(G) (kjer je $Z(G)$ center grupe G).